



272F

کد کنترل

272

F

آزمون (نیمه‌متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری - سال ۱۴۰۱

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه ۱۴۰۰/۱۲/۶



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

رشته آمار
(کد ۲۲۳۲)

جدول مواد امتحانی، تعداد، شماره سؤال‌ها و زمان پاسخ‌گویی

زمان پاسخ‌گویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۱۵۰ دقیقه	۴۵	۱	۴۵	مجموعه دروس تخصصی: - مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی ۱ - احتمال ۱ و ۲ - استنباط آماری ۱

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤال‌ها به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و یا متخلفان برابر مقررات رفتار می‌شود.

* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزله غیبت و حضور نداشتن در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤال‌ها و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله بازگشتی باشد به طوری که $x_0 = 1$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_{n-1}$ در

این صورت دنباله $\{x_n\}$:

- (۱) بی‌کران است و لذا واگرا است. (۲) نزولی و کراندار است و لذا همگرا است.
 (۳) کوشی نیست و لذا واگرا است. (۴) صعودی و کراندار است و لذا همگرا است.

۲- کدام گزینه درباره سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$ درست است؟

- (۱) همگرای مطلق است.
 (۲) همگرای مشروط است.
 (۳) واگرا به بی‌نهایت است.
 (۴) دنباله مجموع جزئی آن کراندار است ولی سری واگرا است.

۳- فرض کنید A زیرمجموعه‌ای نامتناهی و سره از \mathbb{R} باشد و A° و ∂A به ترتیب مجموعه نقاط درونی و مرزی A باشند. کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر $A^\circ = \emptyset$ متناهی باشد، آنگاه $A^\circ = \emptyset$.
 (۲) اگر ∂A نامتناهی باشد، آنگاه $A^\circ = \emptyset$.
 (۳) اگر ∂A نامتناهی باشد، آنگاه $(\partial A)^\circ \neq \emptyset$.
 (۴) اگر A باز و در \mathbb{R} چگال باشد، آنگاه ∂A متناهی است.

۴- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در شرط $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق کند. کدام گزینه معادل پیوستگی f بر \mathbb{R} نیست؟

- (۱) f یکنوا است.
 (۲) f بر هر بازه بسته و کراندار انتگرال پذیر ریمن است.
 (۳) $f|_{\mathbb{Q}^c}$ (تحدید f به مجموعه اعداد گنگ)، پیوسته است.
 (۴) $f|_{\mathbb{Q}}$ (تحدید f به مجموعه اعداد گویا)، پیوسته است.

۵- فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر f' بر (a, b) پیوسته باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.

(۲) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود باشد، آنگاه f' بر (a, b) کراندار است.

(۳) اگر f' بر (a, b) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.

(۴) اگر f بر (a, b) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.

۶- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!} \right)^{\frac{1}{n}}$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{27}{64}$

(۲) $\frac{9}{64}$

(۳) $\frac{27}{16}$

(۴) $\frac{9}{16}$

۷- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{4^n (2n-1)!}$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۳) $-\frac{\pi}{2}$

(۴) $-\frac{\pi}{4}$

۸- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} x^{n!}$ ، کدام است؟

(۱) e

(۲) $\frac{1}{e}$

(۳) ∞

(۴) 1

۹- معادلات پارامتری زیر معرف کدام منحنی در صفحه است؟

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$$

- (۱) سهمی
(۲) دو خط متقاطع
(۳) بیضی
(۴) یک شاخه از یک هذلولی

۱۰- مقدار انتگرال $\int_0^{\pi} 2 \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x) dx$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4} \cos 1$
(۲) $\frac{\pi}{4} \sin 1$
(۳) $\frac{\pi}{2} \cos 1$
(۴) $\frac{\pi}{2} \sin 1$

۱۱- مینیمم مقدار تابع $f(x, y, z) = 2xyz + z^2$ بر سطح کره واحد به مرکز مبدأ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{11}{27}$
(۲) $-\frac{5}{27}$
(۳) $-\frac{8}{27}$
(۴) $\frac{1}{27}$

۱۲- حجم ناحیه محدود به رویه‌های $x^2 + y^2 + 3z = 4$ و $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، کدام است؟

- (۱) π
(۲) $\frac{\pi}{2}$
(۳) $\frac{\pi}{3}$
(۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۳- اگر خم C حاصل از برخورد دو رویه $S_1: x^2 - y^2 - z^2 = \frac{1}{4}$, $S_2: 4x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 3$ در نیم‌فضای $x > 0$

و در جهت راست‌گرد باشد و $F(x, y, z) = (x, -z, y)$ آن گاه $\oint_C F \cdot dr$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$

(۲) $\frac{\pi}{3}$

(۳) π

(۴) $\frac{3}{2}$

۱۴- در کیسه اول ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی و در کیسه دوم ۱۶ مهره قرمز و تعدادی مهره آبی وجود دارد. یک مهره به تصادف از هر کیسه انتخاب می‌شود، اگر احتمال اینکه هر دو مهره انتخابی هم‌رنگ باشند به تقریب برابر $0/44$ باشد، تعداد مهره‌های آبی کیسه دوم چقدر است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۸

(۳) ۶

(۴) ۴

۱۵- شخصی یک تاس سالم را به صورت متوالی پرتاب می‌کند. اگر شماره روی تاس ۶ بالا بیاید، فوراً برنده می‌شود (و بازی متوقف می‌گردد) و اگر شماره روی تاس k بیاید، برای هر k بین ۱ تا ۵، k دقیقه صبر کرده و سپس دوباره تاس را پرتاب می‌کند. متوسط زمان سپری شده از زمان شروع به پرتاب تا برنده شدن، کدام است؟ (توجه: اگر شخص در اولین پرتاب برنده شود، زمان سپری شده را صفر در نظر بگیرید).

(۱) ۱۵

(۲) ۲۰

(۳) ۲۵

(۴) ۳۰

۱۶- اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع کشی استاندارد با تابع توزیع $F(x)$ باشد، مقدار $E\left[\frac{F(X)}{1+F(X)}\right]$ ، کدام است؟

(۱) $\ln(2)$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $1 - \ln(2)$

(۴) وجود ندارد.

۱۷- A و B به‌طور مستقل از هم سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنند. با فرض سالم بودن سکه، احتمال آنکه تعداد شیرها در پرتاب‌های آن‌ها یکسان باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{11}{64} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{64} \quad (۴)$$

۱۸- اگر X یک متغیر تصادفی پواسون باشد، آنگاه مقدار $\frac{E[X(X-1)(X-2)(X-3)]}{E[X(X-1)]}$ کدام است؟

$$\frac{E[X^4]}{E[X^2]} \quad (۱)$$

$$E[X(X-1)] \quad (۲)$$

$$E[X^2] \quad (۳)$$

$$E[(X-2)(X-3)] \quad (۴)$$

۱۹- فرض متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت $[0, 1]$ باشد، تابع چگالی احتمال $Y = \frac{X}{1+X}$ کدام است؟

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 2 (1-y)} & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad (۱)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y(1-y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad (۲)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y)^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad (۳)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} (1-y)^{-2} & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad (۴)$$

۲۰- اگر Y روی فاصله $[-1, 3]$ دارای توزیع یکنواخت باشد، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $U = Y^2$ ، کدام است؟

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{8\sqrt{u}} & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{u}} & 1 < u \leq 9 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{u}} & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{u}} & 1 < u \leq 9 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq u \leq 1 \\ \frac{1}{16} & 1 < u \leq 9 \end{cases} \quad (3)$$

(۴) دارای توزیع یکنواخت روی $[1, 9]$

۲۱- فرض کنید تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X برابر $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n$ باشد. مقدار واریانس X ، کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{27} \quad (3)$$

$$\frac{1}{81} \quad (4)$$

۲۲- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از $\text{Bin}\left(3, \frac{1}{4}\right)$ باشند. مقدار $E(3X - 2Y | X + Y = 2)$ ،

کدام است؟

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

۲۳- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به طوری که $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ و $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ است. تحت چه شرطی $L_1 = C_1X + C_2Y$ و $L_2 = C_3X + C_4Y$ مستقل هستند؟

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \quad (1)$$

$$C_1C_2 + C_3C_4 = 0 \quad (2)$$

$$C_1C_4 + C_2C_3 = 0 \quad (3)$$

$$C_1C_3 + C_2C_4 = 0 \quad (4)$$

۲۴- فرض کنید X_1, X_2, X_3 مستقل و به ترتیب دارای توزیع نمایی با میانگین‌های $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}$ باشند.

کدام است، $P(X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\})$ ؟

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}} \quad (2)$$

$$\frac{e^{-\lambda_1}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \quad (3)$$

$$\frac{e^{-\lambda_1}}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}} \quad (4)$$

۲۵- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} p^x(1-p)^{x+y-2} & x, y = 1, 2, \dots; 0 < p < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

کدام است، $P(Y = 2X)$ ؟

$$\frac{p^2(1-p)}{1-(1-p)^2} \quad (1)$$

$$\frac{p^2(1-p)}{(1-p)^2(1-p)^2} \quad (2)$$

$$\frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^2} \quad (3)$$

$$\frac{p^2}{(1-p)^2(1-(1-p)^2)} \quad (4)$$

۲۶- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0, 1)$ باشد. اگر $L = \min(X_1, X_2, X_3)$ و $M = \max(X_1, X_2, X_3)$ باشد، آنگاه مقدار $P(M \leq m, L \leq \ell)$ کدام است؟ ($m \geq \ell$)

$$2m^2 - 2(m-\ell)^2 \quad (1)$$

$$2m^2 - 2(m-\ell)^2 \quad (2)$$

$$3m^2 - 2(m-\ell)^2 \quad (3)$$

$$m^2 - (m-\ell)^2 \quad (4)$$

۲۷- فرض کنید $\{X_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد به طوری که

$$P\left[X_n = -\frac{1}{n}\right] = P\left[X_n = \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1$$

اگر $F(x)$ توزیع حدی $\{X_n\}_{n \geq 1}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & 0 < x \end{cases} \quad (1)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \end{cases} \quad (2)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \end{cases} \quad (3)$$

(۴) توزیع حدی وجود ندارد.

۲۸- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n و Y_1, Y_2, \dots, Y_n دو نمونه تصادفی مستقل از هم به ترتیب از توزیع‌های $N(\theta, 1)$ و $\text{Bin}(1, p)$ باشند. اگر قرار دهیم $Z_i = X_i Y_i$ ، در این صورت آماره بسنده مینیمال برای (θ, p) ، کدام است؟

$$\left(\sum_{i=1}^n I(Z_i = 0), \sum_{i=1}^n I(Z_i = 1) \right) \quad (1)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n Z_i, \sum_{i=1}^n I(Z_i = 0) \right) \quad (2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n Z_i I(Z_i = 1), \sum_{i=1}^n Z_i I(Z_i = 0) \right) \quad (3)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n Z_i, \sum_{i=1}^n I(Z_i = 1) \right) \quad (4)$$

۲۹- اگر X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی $f_\theta(x) = e^{x-\theta}$ ، $-\infty < x \leq \theta$ باشد،

$$\left(S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \text{ کدام است؟ } E(X_{(n)} S^2)$$

$$\theta - \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$\theta - \frac{1}{n+1} \quad (2)$$

$$\theta + \frac{1}{n} \quad (3)$$

$$\theta + \frac{1}{n+1} \quad (4)$$

۳۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه $(\theta, \theta + |\theta|)$ باشد که در آن $\theta \neq 0$ است.

برآورد گشتاوری θ ، کدام است؟

$$\hat{\theta} = 2\bar{X}I(\bar{X} > 0) + \frac{2}{3}\bar{X}I(\bar{X} < 0) \quad (1)$$

$$\hat{\theta} = 2\bar{X}I(\bar{X} > 0) + \frac{2}{3}\bar{X}I(\bar{X} < 0) \quad (2)$$

$$\hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X}I(\bar{X} > 0) + 2\bar{X}I(\bar{X} < 0) \quad (3)$$

$$\hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{X}I(\bar{X} > 0) + 2\bar{X}I(\bar{X} < 0) \quad (4)$$

۳۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $\text{Bin}\left(2, \frac{\theta}{1+\theta}\right)$ باشد که در آن $\theta > 0$ است. برآوردگر

ماکسیمم درست‌نمایی θ ، کدام است؟

$$\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \quad (1)$$

$$\frac{\bar{X}}{2-\bar{X}} \quad (2)$$

$$\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}} \quad (3)$$

(4) وجود ندارد.

۳۲- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی (مستقل و هم توزیع) از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta-1}{3} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-\theta}; \quad x > 0, \theta > 1$$

برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی برای پارامتر θ ، کدام است؟

$$1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{X_i}{3}\right)} \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{X_i}{3}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{X_i}{3}\right) \quad (3)$$

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{X_i}{3}\right)} \quad (4)$$

۳۳- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال $f_{\theta}(x) = \frac{1}{4} e^{-|x-\theta|}; \quad x \in \mathbb{R}, \theta \in \{1, 2, 4\}$ است. با استفاده از یافته

نمونه تصادفی $x_1 = 1, x_2 = 2$ برآورد ماکزیمم درست‌نمایی θ ، کدام است؟

$$\hat{\theta} = a, \quad a \in \{1, 4\} \quad (1)$$

$$\hat{\theta} = a, \quad a \in \{2, 4\} \quad (2)$$

$$\hat{\theta} = a, \quad a \in \{1, 2\} \quad (3)$$

$$\hat{\theta} = a, \quad a \in \{1, 2, 4\} \quad (4)$$

۳۴- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\theta, 1)$ که $\theta \in \mathbb{R}$ باشد، برآوردگر UMVUE برای $P(X_1 < 0)$ ، کدام است؟

(Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.)

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}} \bar{X}\right) \quad (1)$$

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} \bar{X}\right) \quad (2)$$

$$\Phi\left(-\sqrt{\frac{n-1}{n}} \bar{X}\right) \quad (3)$$

$$\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{n-1}} \bar{X}\right) \quad (4)$$

۳۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع $G(x) = [F(x)]^\theta$ باشد که در آن $F(x)$ یک تابع توزیع پیوسته معلوم است و $\theta > 0$. $UMVUE$ پارامتر θ^{-2} کدام است؟

$$\frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n \ln F(X_i) \right]^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (\ln F(X_i))^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \left[\sum_{i=1}^n \ln F(X_i) \right]^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\ln F(X_i))^2 \quad (4)$$

۳۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع دوجمله‌ای $B(1, p)$ باشد و قرار دهید $T = \sum_{i=1}^n X_i$. اگر

$h_m(T)$ بهترین برآوردگر ناریب ($UMVUE$)، P^m باشد، در این صورت بهترین برآوردگر ناریب $P(X_1 + X_2 > X_3)$ کدام است؟

$$2h_1(T) - 2h_2(T) + 2h_3(T) \quad (1)$$

$$2h_1(T) + 2h_2(T) + 2h_3(T) \quad (2)$$

$$2h_1(T) + 2h_2(T) - 2h_3(T) \quad (3)$$

$$2h_1(T) - 2h_2(T) + 2h_3(T) \quad (4)$$

۳۷- فرض کنید Y_1, \dots, Y_n یک نمونه تصادفی مستقل و هم توزیع از یک جامعه با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\theta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\theta^2}} & y > 0, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یک برآوردگر سازگار بر حسب $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ برای θ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{Y} \quad (1)$$

$$\sqrt{2\pi} \bar{Y} \quad (2)$$

$$\frac{\pi \bar{Y}}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{2\pi} \bar{Y} \quad (4)$$

۳۸- فرض کنید $x_1 = 0/5$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 0/25$ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته $U(0, \theta)$ و θ

نیز دارای توزیع پیشین یکنواخت پیوسته $U(0, 2)$ است. تحت تابع زیان توان دوم خطای وزنی $L(\theta, a) = \left(\frac{a - \theta}{\theta}\right)^2$

برآورد بیز پارامتر θ^3 ، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{8}$

(۲) $\frac{15}{32}$

(۳) $\frac{8}{3}$

(۴) $\frac{32}{15}$

۳۹- فرض کنید $X|\theta \sim N(\theta, 1)$ و $\theta \sim N(0, 1)$. با در نظر گرفتن تابع زیان $L(\theta, \delta) = e^{\delta - \theta} - (\delta - \theta) - 1$

برآوردگر بیز θ ، کدام است؟

(۱) $\frac{X}{2} + \frac{1}{4}$

(۲) $\frac{X}{2} + \frac{1}{2}$

(۳) $\frac{X}{2} - \frac{1}{4}$

(۴) $\frac{X}{2} - \frac{1}{2}$

۴۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با میانگین $\frac{\alpha}{\lambda}$ باشد که در آن α معلوم است. با انتخاب توزیع

پیشین ناسره $\pi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ؛ $\lambda > 0$ و تحت زیان توان دوم خطا، برآوردگر بیزی تعمیم یافته برای پارامتر λ ، کدام است؟

(۱) $n\alpha \sum X_i$

(۲) $\frac{n\alpha}{\sum X_i}$

(۳) $\frac{\alpha(n-1)}{\sum X_i}$

(۴) $\alpha(n-1) \sum X_i$

۴۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_{\theta}(x) = \frac{\gamma x}{\theta^{\gamma}} e^{-\frac{x}{\theta}}; \quad x > 0, \theta > 0$$

برآوردگر بیزی تعمیم‌یافته θ تحت تابع زیان $L(\theta, \delta) = (1 - \frac{\delta}{\theta})^{\gamma}$ و نسبت به پیشین جفریز، کدام است؟

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{\gamma})} \sqrt{\sum X_i^{\gamma}} \quad (۱)$$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{\gamma})} \sum X_i^{\gamma} \quad (۲)$$

۴۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Bin}(1, \theta)$ و کلاس برآوردگرهای θ به صورت $\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + a$ باشد. تحت تابع

زیان توان دوم خطا $(\delta - \theta)^2$ برآوردگر مینیماکس برای θ در این کلاس، کدام است؟

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n+1} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (۴)$$

۴۳- از میان برآوردگرهای D_1, D_2, D_3 برای پارامتر $\theta \in [1, 2]$ که به ترتیب دارای توابع مخاطره $R_1(\theta) = a\theta - 1$

و $R_2(\theta) = -\theta^2 + a\theta$ و $R_3(\theta) = \frac{a}{\theta+1}$ ($2 < a < 3$) هستند، برآوردگرهای مینیماکس و مجاز به ترتیب کدامند؟

$$D_1, D_1 \quad (۱)$$

$$D_2, D_2 \quad (۲)$$

$$D_2, D_1 \quad (۳)$$

$$D_1, D_2 \quad (۴)$$

۴۴- مسئله تصمیم بدون داده با تابع زیان زیر را در نظر بگیرید.

A \ θ	a ₁	a ₂	a ₃
θ ₁	۰	۱۰	۴
θ ₂	۸	۰	۳

عمل مینیماکس آمیخته کدام است؟

$$(1) \left(\frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8} \right)$$

$$(2) \left(\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, 0 \right)$$

$$(3) \left(\frac{1}{9}, 0, \frac{8}{9} \right)$$

$$(4) \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, 0 \right)$$

۴۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از $\text{Bin}(1, p)$ باشد، در برآورد پارامتر p فرض کنید تابع زیان را $\frac{(\delta - p)^2}{p(1-p)}$

در نظر بگیریم. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$$(1) \frac{n\bar{X}}{n+1} \text{ یک برآوردگر مجاز است.}$$

$$(2) \bar{X} \text{ یک برآوردگر مجاز است.}$$

$$(3) \frac{n+1}{n}\bar{X} \text{ یک برآوردگر مجاز است.}$$

$$(4) \frac{n-1}{n}\bar{X} \text{ یک برآوردگر مجاز است.}$$

